

الوحدة السادسة مركز الثقل

١-٦ > مركز الثقل

#### 🛄 الجسم الجاسئ:

هو الجسم الذي تكون فيه المسافة بين أي جسيمين من الجسيمات المكونة له ثابتة

## 🛄 مركز ثقل الجسم الجاسئ:

هو نقطة إفتراضية تعبر عن محصلة أثقال عناصر الجسم الجاسئ وهى أيضا نقطة الإتزان أى أنها النقطة التي يتوزع حولها ثقل الجسم بالتساوى من جميع الجهات

#### تعریف:

مركز ثقل جسم جاسئ هو نقطة ثابتة في الجسم يمر بها خط عمل محصلة أوزان الجسيمات التي يتكون منها الجسم ، ولا يتغير موضعها بالنسبة للجسم مهما تغير وضعه بالنسبة للأرض.

## 🛄 الجسم المنتظم الكثافة.

هو الجسم الذي تكون كتلة وحدة الأطوال أو المساحات أو الحجوم المأخوذة من أي جزء منه ثابتة

#### ملاحظات:

- ١) مركز ثقل الجسم الجاسئ يتغير بتغير شكله وذلك لتغير الأبعاد بين الجسيمات المكونة له.
  - ٢) يوجد مركز ثقل واحد للجسم الجاسئ.
- ٣) خط عمل وزن الجسم الجاسئ يجب أن يمر بمركز ثقل الجسم وايضا بمركز الكرة الأرضية.

# 🛄 مركز ثقل نقطتين ماديتين (جسيمين):

حيث سم هو الإحداثي السيني لمركز الثقل أي بعد مركز الثقل عن الراصد

# 🕮 مثال:

جسيمين ماديين كتلة كل منهما ٣ نيوتن ، ٥ نيوتن والمسافة بينهما ٨ أمتار . أوجد مركز ثقل الجسيمين بالنسبة للجسم ٣ نيوتن.

# ک الحل:

نعتبر أن الخط الواصل بين الجسيمين ينطبق على محور السينات وأن نقطة الأصل تقع عند الجسم ٣ نيوتن

$$oldsymbol{\circ} = oldsymbol{\circ}$$
 فيكون:  $oldsymbol{\circ} = oldsymbol{\circ}$  ،  $oldsymbol{\circ} = oldsymbol{\circ}$  ،  $oldsymbol{\circ} = oldsymbol{\circ}$ 

$$\frac{\nabla u_{\gamma} + u_{\gamma} + u_{\gamma} + u_{\gamma}}{\nabla u_{\gamma} + u_{\gamma} + u_{\gamma}} = \frac{\nabla u_{\gamma} + u_{\gamma} + u_{\gamma}}{\nabla u_{\gamma} + u_{\gamma} + u_{\gamma}} = \frac{\nabla u_{\gamma} + u_{\gamma} + u_{\gamma}}{\nabla u_{\gamma} + u_{\gamma}} = \frac{\nabla u_{\gamma} + u_{\gamma} + u_{\gamma}}{\nabla u_{\gamma} + u_{\gamma}} = \frac{\nabla u_{\gamma} + u_{\gamma} + u_{\gamma}}{\nabla u_{\gamma} + u_{\gamma}} = \frac{\nabla u_{\gamma} + u_{\gamma} + u_{\gamma}}{\nabla u_{\gamma} + u_{\gamma}} = \frac{\nabla u_{\gamma} + u_{\gamma} + u_{\gamma}}{\nabla u_{\gamma} + u_{\gamma}} = \frac{\nabla u_{\gamma} + u_{\gamma} + u_{\gamma}}{\nabla u_{\gamma} + u_{\gamma}} = \frac{\nabla u_{\gamma} + u_{\gamma} + u_{\gamma}}{\nabla u_{\gamma} + u_{\gamma}} = \frac{\nabla u_{\gamma} + u_{\gamma} + u_{\gamma}}{\nabla u_{\gamma} + u_{\gamma}} = \frac{\nabla u_{\gamma} + u_{\gamma} + u_{\gamma}}{\nabla u_{\gamma} + u_{\gamma}} = \frac{\nabla u_{\gamma} + u_{\gamma} + u_{\gamma}}{\nabla u_{\gamma} + u_{\gamma}} = \frac{\nabla u_{\gamma} + u_{\gamma} + u_{\gamma}}{\nabla u_{\gamma} + u_{\gamma}} = \frac{\nabla u_{\gamma} + u_{\gamma} + u_{\gamma}}{\nabla u_{\gamma} + u_{\gamma}} = \frac{\nabla u_{\gamma} + u_{\gamma} + u_{\gamma}}{\nabla u_{\gamma} + u_{\gamma}} = \frac{\nabla u_{\gamma} + u_{\gamma} + u_{\gamma}}{\nabla u_{\gamma} + u_{\gamma}} = \frac{\nabla u_{\gamma} + u_{\gamma} + u_{\gamma}}{\nabla u_{\gamma} + u_{\gamma}} = \frac{\nabla u_{\gamma} + u_{\gamma} + u_{\gamma}}{\nabla u_{\gamma} + u_{\gamma}} = \frac{\nabla u_{\gamma} + u_{\gamma} + u_{\gamma}}{\nabla u_{\gamma} + u_{\gamma}} = \frac{\nabla u_{\gamma} + u_{\gamma} + u_{\gamma}}{\nabla u_{\gamma} + u_{\gamma}} = \frac{\nabla u_{\gamma} + u_{\gamma} + u_{\gamma}}{\nabla u_{\gamma} + u_{\gamma}} = \frac{\nabla u_{\gamma} + u_{\gamma} + u_{\gamma}}{\nabla u_{\gamma} + u_{\gamma}} = \frac{\nabla u_{\gamma} + u_{\gamma} + u_{\gamma}}{\nabla u_{\gamma} + u_{\gamma}} = \frac{\nabla u_{\gamma} + u_{\gamma} + u_{\gamma}}{\nabla u_{\gamma} + u_{\gamma}} = \frac{\nabla u_{\gamma} + u_{\gamma} + u_{\gamma}}{\nabla u_{\gamma} + u_{\gamma}} = \frac{\nabla u_{\gamma} + u_{\gamma} + u_{\gamma}}{\nabla u_{\gamma} + u_{\gamma}} = \frac{\nabla u_{\gamma} + u_{\gamma} + u_{\gamma}}{\nabla u_{\gamma} + u_{\gamma}} = \frac{\nabla u_{\gamma} + u_{\gamma} + u_{\gamma}}{\nabla u_{\gamma} + u_{\gamma}} = \frac{\nabla u_{\gamma} + u_{\gamma} + u_{\gamma}}{\nabla u_{\gamma} + u_{\gamma}} = \frac{\nabla u_{\gamma} + u_{\gamma} + u_{\gamma}}{\nabla u_{\gamma} + u_{\gamma}} = \frac{\nabla u_{\gamma} + u_{\gamma} + u_{\gamma}}{\nabla u_{\gamma} + u_{\gamma}} = \frac{\nabla u_{\gamma} + u_{\gamma} + u_{\gamma}}{\nabla u_{\gamma} + u_{\gamma}} = \frac{\nabla u_{\gamma} + u_{\gamma} + u_{\gamma}}{\nabla u_{\gamma} + u_{\gamma}} = \frac{\nabla u_{\gamma} + u_{\gamma} + u_{\gamma}}{\nabla u_{\gamma} + u_{\gamma}} = \frac{\nabla u_{\gamma} + u_{\gamma} + u_{\gamma}}{\nabla u_{\gamma} + u_{\gamma}} = \frac{\nabla u_{\gamma} + u_{\gamma}}{\nabla u_{\gamma} + u_{\gamma}}} = \frac{\nabla u_{\gamma} + u_{\gamma}}{\nabla u_{\gamma} + u_{\gamma}} = \frac{\nabla u_{\gamma} + u_{\gamma}}{\nabla u_{\gamma}$$

أى أن مركز ثقل الجسيمين يقع على بعد ٥ متر من الجسم ٣ نيوتن

#### 🛄 متجه موضع مركز الثقل للجسم الجاسئ:

إذا كانت و ، و ، و ، و ، ٠ ٠ ٠ و و أوزان الجسيمات المكونة للجسم الجاسئ وكان حمر ، حمر ، مر ، حمر ، مر مر مر متجه الموضع مر لمركز ثقل الجسم الجاسئ بالنسبة لنقطة الأصل في متجه الموضع مر لمركز ثقل الجسم الجاسئ بالنسبة لنقطة الأصل يتحدد من العلاقة:

$$\overset{\sim}{\nabla} = \frac{e_{1}\overset{\sim}{\nabla_{1}} + e_{2}\overset{\sim}{\nabla_{2}} + e_{3}\overset{\sim}{\nabla_{3}} + \cdots + e_{0}\overset{\sim}{\nabla_{0}}}{e_{1} + e_{2} + e_{3} + \cdots + e_{0}}$$

ومن العلاقة الإتجاهية السابقة يمكن كتابة المركبات في اتجاهى المحورين سي عص فنحصل على:

# 🛄 مثال:

البح مثلث متساوى الأضلاع طول ضلعه ٤ ديسيمتر ، النقط ٤ ، ه ، و منتصفات أضلاعه بج ، جم ، الب على الترتيب، وضعت الأثقال ١٥٥، ٢٥٤، ٢٥٤ ث كجم عند النقط ٢، ب، ج، ح، ه، وعلى الترتيب أوجد مركز ثقل المجموعة من ب

نعتبر أن أحد أضلاع المثلث ينطبق على محور السينات وأن نقطة الأصل تقع عند الرأس ب حساب احداثيات النقط

$$\alpha = (Y \sqrt{Y} \approx J \cdot Y^{\circ}) / (\overline{Y} \approx J \cdot Y^{\circ}) = (Y \cdot \sqrt{Y})$$

$$(\cdot, \cdot) = s$$
  $(\cdot, \cdot) = s$   $(\cdot, \cdot) = s$ 

ثم نكون جدول الإحداثيات كمايلي:

٦ ث ڪجم	٤ ث ڪجم	٢ ث كجم	٣ ث ڪجم	ر ثکجم	٥ ث ڪجم	الثقل
١	٣	۲	٤	1. /	70	س
₹/	<b>T</b>	•	•	/ • 11	7	رص

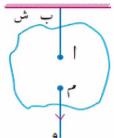
$$\frac{\frac{1}{2}m_{1} + \frac{1}{2}m_{2} + \frac{1}{2}m_{4} + \frac{$$

$$(1,7,7) \simeq (\frac{\overline{Y}/7}{7}) \simeq (\frac{\overline{X}}{7}) \simeq (1,7,7)$$
 درکز ثقل المجموعة هو

ويجمعهما خطعمل واحدا

#### 🛄 التعليق الحر للجسم الجاسئ:

إذا علق جسم جاسئ من إحدى نقطه تعليقا حرا فإن مركز ثقله يقع على الخط الرأسي المار بنقطة التعليق لأن الجسم في هذه الحالة يكون متزن تحت تأثير قوتين وهما:



١) الشد في الخيط ٢) ثقل الجسم رأسياً لأسفل
 وبالتالي فإن هاتين القوتين يجب أن تتساويا في المقدار وتتضادا في الإنجاه

.. مركز تقل الجسم (٢) لابد أن يقع على امتداد الخط الرأسي <del>با أ</del>

#### 🛄 مركز ثقل القضبان والصفائح المنتظمة:

- ١) مركز ثقل قضيب منتظم الكثافة يقع عند نقطة منتصفه.
- ٢) مركز ثقل صفيحة رقيقة منتظمة على شكل متوازى أضلاع أو مستطيل أو معين أو مربع يقع عنـد
   مركزها الهندسى أى عند نقطة تقاطع القطرين.
  - ٣) مركز ثقل صفيحة رقيقة منتظمة على شكل مثلث يقع عند نقطة تلاقى متوسطات المثلث.
    - ٤) مركز ثقل صفيحة رقيقة منتظمة على شكل دائرة يقع عند مركز الدائرة.
- ٥) مركز ثقل ثلاث كتل متساوية موضوعة عند رؤوس مثلث ينطبق على مركز ثقل صفيحة رقيقة
   محدودة بهذا المثلث أى يقع عند نقطة تقاطع المتوسطات

#### ملاحظات هامة جدا

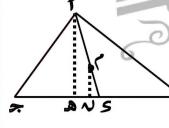
- ١) يمكن إستخدام قواعد تعيين محصلة القوى المتوازية في تعيين مركز ثقل الجسم.
- ٢) مركز ثقل الجسم الجاسئ يكون ثابتا ولايقع بالضرورة على أحد جسيمات هذا الجسم.
- ٣) مركز ثقـل نقطـتين مـاديـتين يقـع علـى القطعـة المستقيمة الواصـلة بينهمـا ويقـسمها بالنـسبة
   العكسية لمقدار القوتين أى أن مركز الثقل يكون اقرب للكتلة الكبرى.
  - ٤) يمكن توزيع وزن صفيحة رقيقة منتظمة على شكل مثلث أو متوازى أضلاع أو مستطيل أو معين أو مربع على رؤوسها بالتساوى.
  - ٥) الصفائح المنتظمة السمك والكثافة تكون النسبة بين أوزانها = النسبة بين مساحة أسطحها.
  - 7) الأسلاك والقضبان المنتظمة السمك والكثافة تكون النسبة بين أوزانها = النسبة بين أطوالها.
    - ٧) الأطوال والمساحات والحجوم المتساوية تكون النسبة بين الأوزان = النسبة بين الكثافات.

#### تذكران:

١) نقطة تقاطع المتوسطات تقسم المتوسط بنسبة ١: ٢ من جهة القاعدة

أى أنه في 1⁄4بج إذا كان عج متوسط ، م نقطة تقاطع المتوسطات فإن:

$$sr = sr$$
,  $sr = rr$   $\Leftarrow$   $sr = sr$ ,  $rr = sr$ 



وبالتالى يكون:

إرتفاع المثلث النازل على ضلع ما ٣ أمثال العمود النازل من نقطة تقاطع المتوسطات على هذا الضلع

عی:  $P = (m_{\gamma})$  باحداثیات منتصف قطعة مستقیمة  $P = \overline{P}$  حیث  $P = (m_{\gamma})$  ،  $P = (m_{\gamma})$  هی:

$$\left(\frac{w+w}{v}, \frac{w+w}{v}\right) = \frac{w+w}{v}$$
احداثیات المنتصف

٣) نقطة تقاطع المتوسطات في المثلث الذي رؤوسه (س ، ص ، ) ، (س ، ، ص ، ) ، (س ، ، ص ، ) هي:

$$(\frac{\psi^{\omega}+\psi^{\omega}+\psi^{\omega}+\psi^{\omega}+\psi^{\omega}+\psi^{\omega}+\psi^{\omega}}{\psi})=0$$

$$(\frac{\xi^{m}+\gamma^{m}}{\gamma},\frac{\xi^{m}+\gamma^{m}}{\gamma})=(\gamma) \quad (\frac{\eta^{m}+\gamma^{m}}{\gamma},\frac{\eta^{m}+\gamma^{m}}{\gamma})=(\gamma)$$

# 🕮 مثال:

سلك رفيع منتظم السمك والكثافة على شكل شبه منحرف  $\P$ بجى فيه  $\P$ ب = 0 اسم ، + + 0 سم ، + + 0 سم ، + 0

# <u>ک الحسل:</u>

نعتبر أن الرأس ب عند نقطة الأصل والضلعين الب على محورى الصادات و السينات

- . السلك منتظم السمك والكثافة
- .. النسبة بين الكتل = النسبة بين الأطوال

ای ان:

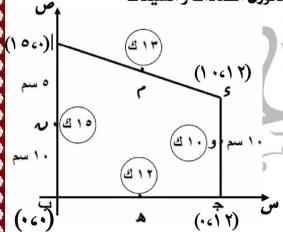
كتلة أب : كتلة بج : كتلة جد : كتلة أد

17:1:17:10=

.. كتلة اب = ٥ اك ، كتلة ب = ٢ اك ..

، كتلة جع = ٠ اك ، كتلة عالى ،

وكتلة كل ضلع تؤثر في منتصفه لأن السلك منتظم



ثم نكون جدول الإحداثيات كمايلي:

N	(	و	A	النقطة
ط١٥	طا <b>ت</b>	٠١٥	417	الكتلة
•	٦	17	7	w /
٧,٥	17,0	0	1	ص

$$\frac{\xi^{w_{\xi}}d + w_{\eta}d + w_{\eta}d + w_{\eta}d + w_{\eta}d}{\xi^{d} + w_{\eta}d + y_{\eta}d} = w.$$

$$0, \xi = \frac{d Y V \cdot}{d 0 \cdot} = \frac{v \times d 10 + 7 \times d 1 W + 1 Y \times d 1 \cdot + 7 \times d 1 Y}{d 10 + d 1 W + d 1 \cdot + d 1 Y} = \frac{v \times d 1 + v \times d 1 \times d 1 \times d 1 \times d 1}{d 10 + d 1 W + d 1 \cdot + d 1 Y} = \frac{v \times d 1 \times d 1 \times d 1 \times d 1 \times d 1}{d 10 + d 1 W + d 1 \cdot + d 1 Y} = \frac{v \times d 1 \times d 1 \times d 1 \times d 1 \times d 1}{d 10 + d 1 W + d 1 \times d 1 \times d 1 \times d 1} = \frac{v \times d 1 \times d 1 \times d 1 \times d 1 \times d 1}{d 10 + d 1 W + d 1 \times d 1 \times d 1 \times d 1 \times d 1} = \frac{v \times d 1 \times d 1}{d 10 + d 1 W + d 1 \times d 1$$

$$\frac{\sum_{\xi} \omega_{\xi} \omega_{+} + \sum_{\gamma} \omega_{+} \omega_{+} + \sum_{\gamma} \omega_{+} \omega_{+$$

.. مركز ثقل الجموعة هو (٤,٥،٥,٤)

أى أن مركز الثقل يبعد ٤,٥ سم عن الضلع آب ويبعد ٥,٥ سم عن الضلع بج

# 🕮 مثال:

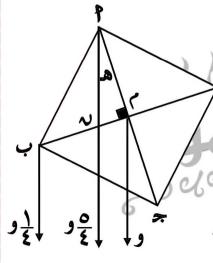
علقت صفيحة مربعة منتظمة وزنها (9) تعليقاً حراً من الرأس  $\frac{1}{9}$  وثبت عند الرأس بثقل وزنه  $\frac{1}{9}$  اثبت أن ظل زاوية ميل القطر  $\frac{1}{9}$  على الرأسي في وضع الإتزان يساوى  $\frac{1}{9}$ 

## الحاد

قبل تثبيت الثقل عند ب يكون وزن الصفيحة (9) يؤثر عند نقطة ؟ وبعد تثبيت الثقل الجون وزن الصفيحة الحون وزن الصفيحة الجون وزن الصفيحة الجون وزن الصفيحة الجون وزن الصفيحة المون وزن الصفيحة الجون وزن الصفيحة المون وزن المون وزن المون وزن المون وزن الصفيحة المون وزن وزن المون وزن المون وزن وزن المون وزن وزن المون وزن وزن المون وزن المون وزن وزن

ويصبح مركز الثقل بين النقطتين مى ب

- ·. الصفيحة علقت تعليقا حرا من أ
- .. مركز الثقل يقع على الخط الرأسي المار بنقطة 4
- .. مركز الثقل هو نقطة تقاطع الخط الراسى مع  $\overline{\gamma}$  أى نقطة  $\omega$
- $\lambda c = -c \times \lambda = \frac{1}{5} e \times \lambda c \times \dots \times \lambda c \times \dots \times \lambda c \times \dots \times \lambda = \lambda c \times \lambda c \times \dots \lambda c \times \dots \times \lambda c \times \dots \lambda c \times \dots \times \lambda c \times \dots \lambda c \times \dots \times \lambda c \times \dots \lambda c \times \dots \times \lambda c \times$



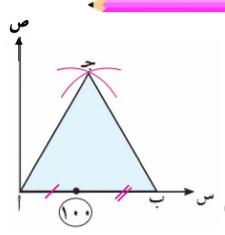
 $\lambda\lambda$ 

$$P : \Gamma = P : \Gamma = P : \Gamma = P : \Gamma$$
 الصفيحة على شكل مربع  $\Gamma : \Gamma = P : \Gamma = P : \Gamma$ 

$$\frac{1}{6} = \frac{\lambda \zeta}{6} = \frac{\lambda \zeta$$

# □ مثال:

في الشكل المقابل:

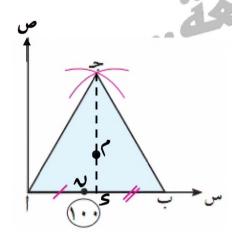


## کر الحسل:

قبل الصاق الكتلة ١٠٠ جم يكون مركز ثقل الصفيحة عند نقطة ٢

بعد الصاق الكتلة ۱۰۰ جم عند  $\sqrt{8}$  حيث  $\sqrt{8}\sqrt{8}$  الم عند الم حيث ألا حداثيات كمايلي:

جدول الإحداثيات كمايتي:					
N	~	النقطة			
೭೧1	٣.,	الكتلة			
٤	٦	<del>س</del>			
$\pi$ III	₹ 7	ص			



22-11-	77	_ £×1 · · + 7×1.	- 1 m d + 1 m d m ·
<b>5</b> ,5 = <del>Y</del> =	٤٠٠		- <del>`رط+رط</del> - ره٠

.. مركز ثقل الصفيحة هو (٥,٥) ..

أى أن مركز الثقل يبعد ٢,٦ سم عن المحور ٢٠٠٠ ويبعد ٥,٥ سم عن المحور ٢٠٠٠ أ

#### حل آخر:

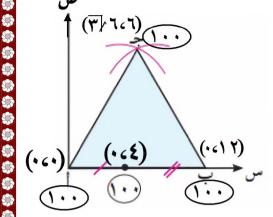
بتوزيع كتلة الصفيحة على الرؤوس الثلاثة للمثلث

#### استاتيكا ثانوية عامة

الابداع في الرياضيات

ثم نكون جدول الإحداثيات كمايلى:

<i>&gt;</i> -	ب	N	P	النقطة
١	١	١	١	الكتلة
٦	17	٤	•	<u>w</u>
<b>₹</b> }٦	•	. 1	1	ص



$$\circ, \circ = \frac{11}{7} = \frac{77 \cdot \cdot}{\xi \cdot \cdot} = \frac{7 \times 1 \cdot \cdot + 17 \times 1 \cdot \cdot + \xi \times 1 \cdot \cdot + \cdot \times 1 \cdot \cdot}{1 \cdot \cdot + 1 \cdot \cdot \cdot + 1 \cdot \cdot \cdot + 1 \cdot \cdot \cdot} =$$

$$Y, T \simeq \frac{\overline{Y} \setminus Y}{Y} = \frac{\overline{Y} \setminus T \cdot \cdot \cdot}{\xi \cdot \cdot \cdot} = \frac{\overline{Y} \setminus T \times 1 \cdot \cdot + \cdot \times 1 \cdot \cdot + \cdot \times 1 \cdot \cdot + \cdot \times 1 \cdot \cdot}{1 \cdot \cdot + 1 \cdot \cdot + 1 \cdot \cdot + 1 \cdot \cdot + 1 \cdot \cdot}$$

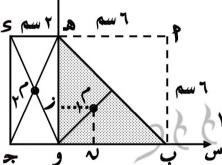
.. مركز ثقل الصفيعة هو (٥,٥) ٢, ١٠

أى أن مركز الثقل يبعد ٢,٦ سم عن المحور السن ويبعد ٥,٥ سم عن المحور الله المركز الثقل يبعد ١٠٦ سم عن المحور

# 🛄 مثال:

صفيحة رقيقة منتظمة الكثافة على شكل مستطيل البح فيه المبا $\Lambda= 0$  سم، ب $\Lambda= 0$  سم،

ه  $\overline{SP}$  بحیث  $\overline{SP}$  سم ، ثنی المثلث  $\overline{PP}$  حول الضلع  $\overline{PP}$  حتی انطبق  $\overline{PP}$  علی  $\overline{PP}$  تماما عین مرکز ثقل الصفیحة بعد ثنیها بالنسبة إلی  $\overline{PP}$  ،  $\overline{PP}$  ،  $\overline{PP}$ 



# ک الحسل:

- ". الصفيحة منتظمة الكثافة
- .. النسبة بين الكتل = النسبة بين المساحات
- · مساحة المربع البوه : مساحة المستطيل ه وجه = ١٢:٣٦ = ١٠
  - .. كتلة المربع البحد = ٣ ك ، كتلة المستطيل ه وجد = ك

بعد ثني المثلث ۚ ﴿ إِبِ هِ وِبِاعتبار و ۖ ﴾ و صَ محورين متعامدين كما بالشكل

. الجزء المثلث هوب المكون من طبقتين كتلته ٣ ك وتؤثر عند نقطة متوسطات المثلث ٢,

$$(\Upsilon \circ \Upsilon) = (\Upsilon \circ \Upsilon) , \ \varphi = (\Upsilon \circ \Upsilon) , \ \alpha = (\Upsilon \circ \Upsilon) , \ \alpha = (\Upsilon \circ \Upsilon) = (\Upsilon \circ \Upsilon$$

٩.

٦,٢	١,٢	النقطة
් එ	ط ۳	الكتلة
1-	۲	<u>w</u>
٣	۲	ص

$$1,70 = \frac{0}{\xi} = \frac{20}{2\xi} = \frac{(1-)\times2+7\times27}{2+27} = \frac{7072+7072}{72+72} = 70.$$

$$7,70 = \frac{9}{\xi} = \frac{29}{2\xi} = \frac{7 \times 2 + 7 \times 27}{2 + 27} = \frac{7 \times 2 + 7 \times 27}{72 + 72} = \frac{7 \times 2 + 7 \times 27}{72 + 72} = \frac{7}{7} \times \frac{1}{7} = \frac{1}{7} = \frac{1}{7} \times \frac{1}{7} = \frac{1}{7} = \frac{1}{7} = \frac{1}{7} = \frac{1}{7} =$$

.. مركز ثقل الصفيحة هو (٥٠١,٢٥)

أى أن مركز الثقل يبعد ٥ ٢,٢ سم عن جبّ ويبعد (٥ ٢ + ١,٢ اى ٥ ٣,٢ سم عن جح خ

# 🕮 مثال:

المبح صفيحة على شكل مثلث متساوى الأضلاع كتلتها ٣ كجم ، م مركز ثقلها وضعت كتل مقاديرها المبعدة عند مثلث متسوف المبعدة عند منتصف المبعدة عند منتصف المبعدة عند منتصف المبعدة المرؤوس المبعدة عند منتصف المبعدة المبعدة عند منتصف المبعدة المبعد

## <u>ک الحسل:</u>

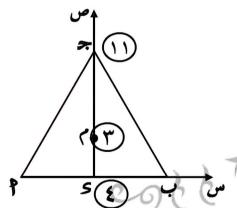
باعتبار < نقطة الأصل ، أب على محور السينات ، ج على محور الصادات وبفرض أن طول ج = T ل

$$(J \cdot \cdot) = \uparrow : S \Rightarrow \frac{1}{\mu} = S \uparrow : (J \wedge \cdot \cdot) = \Rightarrow ( \cdot \cdot \cdot \cdot) = S : :$$

.:. منتصف ک<del>ہ</del> = (۲۰۰ ل

محصلة الكتلتين ٢ ، ٢ كجم تساوى ٤ كجم عند نقطة ٤ ثم نكون جدول الإحداثيات كمايلي:

		0	5	النقطة
)	-	11	٤	الكتلة
	•	•	•	<del>س</del>
	J	٦٣	•	ص



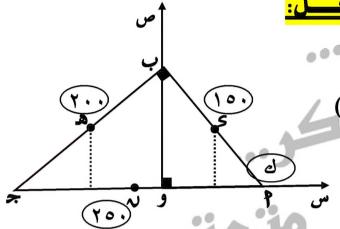
$$JY = \frac{JWY}{1 \Lambda} = \frac{J \times W + JW \times 1}{W + 1} + \frac{1 \times \xi}{W + 1} = V \quad ( \quad \cdot = V )$$

- $(Y) \leftarrow (Y \circ Y \cup Y \circ Y \cup Y )$  ... مركز ثقل المجموعة هو
- من (١) ، (٢) . مركز ثقل المجموعة يقع عند منتصف كم

# 🛄 مثال:

سلك منتظم السمك والكثافة طوله ١٢٠ سم وكتلته ٢٠٠جرام. ثنى على شكل مثلث قائم الزاوية فى ب حيث المسلم الله المبتت كتلة له جرام عند الرأس الأثم علق السلك تعليقا حراً من الرأس ب فإتزن عندما كانت المج الفقية فأوجد له.

# ≥ الحـل:



- · الثلث قائم الزاوية في ب ، الب = ٠٠٠
- (١) ٩ ، = ٣ · ١ ٢ ، = ۶ + ۶٩ ∴

$$(?) \cdot (?) \cdot (?)$$

- ∴ اج = ، ٥ سم ، بح = ، ٤ سم
- : المجري أفقى عند الإتزان :: بو لا المجري أفقى عند الإتزان المجري أفقى عند الإتزان المجري المجري المجري المجري
  - $\sim 4 = \frac{\cancel{\xi} \cdot \cancel{\chi} \cdot \cancel{\zeta}}{\cancel{\zeta}} = \cancel{\zeta} \cdot \cancel{\zeta}$ سم

$$\therefore$$
 اوج  $\langle (\Upsilon)^7 - (3\Upsilon)^7 = \Lambda$  سم  $\therefore$  وج $= \Upsilon \Upsilon$  سم  $\cdot$  وہ $= \Upsilon$  سم  $\cdot$ 

- . والكثافة  $\frac{7}{3}$  : السلك منتظم السمك والكثافة  $\frac{7}{3}$  . . كتلة وحدة الأطوال  $\frac{7}{3}$ 
  - .. كتلة الب = ٠ ٣ × ٥ = ٠ ٥ ١ جم ، كتلة ب ح = ٠ ٤ × ٥ = ٠ ٢ جم
- ، كتلة ٩ج = ٠ • × = ٠ ٢ جم وهذه الكتل تؤثر في منتصفات الأضلاع لأن السلك منتظم

باعتبار و أم و محورى الإحداثيات كما بالشكل في و = (٠٠٠) ثم نكون جدول الإحداثيات كمايلى:

N	21	5	P	النقطة
40.		0	ව	الكتلة
<b>Y</b> –	<b>D</b> -	9	١٨	w
0	719	17		ص

- : مركز الثقل يقع على الخط الراسي المار بنقطة التعليق ب 💎 . . س =
  - $\cdot = \frac{(Y-)\times Y\circ \cdot + (1\ T-)\times Y\cdot \cdot + 9\times 1\circ \cdot + 1\ A\times \Delta}{U+\cdot \cdot T}:$
- ·=٣1··- ८१४:. ·= ١٧٥٠-٣٢٠٠- ١٣٥٠+ ८१४:.
  - $\sim \times \times \sim = \frac{44..}{1.} = 3..$   $\sim \times \times \sim = 3..$

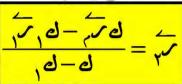
استاتيكا ثانوية عامة

الابداع في الرياضيات 💎 🗘 🗘 🗘 🗘 🗘 🗘 🗘 🖟 🖟 🖟 🖟 🖟 🖟 🖟 🖟 🖟

# حريقة الكتلة السالبة

## الكتلة السالبة:

اذا كان الجسم كتلته ك ومركز ثقله ٢ واقتطعنا منه جزء كتلته ك ومركز ثقله ٢ واقتطعنا منه جزء كتلته ك ومركز ثقله ٢ فإن كتلة الجزء الباقى تكون ك ويكون مركز ثقله ٢ فإذا كان كر ، ٢٠٠٠ متجهات موضع ٢ ، ٢ ٢ ، ٢ فإن:



وبالتعويض عن حمر كركم بمركباتهما الجبرية نحصل على إحداثيات مركز ثقل الجزء المتبقى وهما:

: شده

(س، ص) مركز ثقل الجسم الأصلى وكتلته ك، (س، ص، ) مركز ثقل الجزء المقتطع وكتلته ك، أن أن

احداثى مركز ثقل الجسم المتبقى =

ر<mark>ہ ۔ سط</mark> = ہی رط – ط

الكتلة الكلية × احداثى مركز ثقلها \_ الكتلة المقتطعة × احداثى مركز ثقلها

الفرق بين الكتلتين

# ۵ مثال:

وضعت ٥ كتل متساوية عند الرؤوس ٢، ب، ج، ح، ه لمربع ٢٠ جح حيث ه ملتقى قطريه وطول ضلع المربع ٢٠ هم منتقى قطريه وطول ضلع المربع ١٢ سم، عين مركز ثقل المجموعة المربع ١٢ سم، عين مركز ثقل المجموعة المتبقية بالنسبة للمحورين  $\overline{\overline{Y}}$ ،  $\overline{\overline{Y}}$ .

# ك الحل:

نَاخِذَ ﴿ ﴿ اللَّهُ مَعُورِينَ مَتَعَامِدِينَ بِاعْتَبَارَ ﴿ نَقَطَةُ الْأَصَلَ نَافِرُضَ أَنِ الْكُتُلِ الْمُتَسَاوِيةُ مَقْدَارِ كُلُّ مِنْهَا كَ

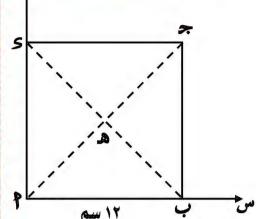
استاتيكا ثانوية عامة

#### 200000000000000000

الابداع في الرياضيات

بتكوين جدول الإحداثيات





$$7 = \frac{27 \cdot 20}{20} = \frac{7 \times 2 + 3 \times 2 + 17 \times 2$$

.. مركز ثقل الجموعة هو (٦٠٦)

بعد رفع الكتلة الموجودة عند ب

$$\xi, \circ = \frac{9}{7} = \frac{21 \, \Lambda}{2\xi} = \frac{17 \times 2 - 7 \times 20}{2 - 20} = \frac{100 \, 2 - 20}{12 - 2} = 100 \, \therefore$$

.. مركز ثقل المجموعة المتبقية هو (٧,٥،٤,٥)

## 🕮 مركز ثقل بعض الأجسام التي لها خصائص تماثل:

- إذا وجد محور تماثل هندسي لصفيحة رقيقة منتظمة الكثافة فإن مركز ثقلها يقع على هذا المحور.
  - إذا وجد مستوى تماثل هندسي لجسم منتظم الكثافة فإن مركز ثقله يقع في هذا المستوى.
    - مركز ثقل بعض الحالات الخاصة:
    - ١) مركز ثقل سلك منتظم الكثافة على هيئة دائرة يقع في مركز الدائرة.
    - ٢) مركز ثقل صفيحة منتظمة الكثافة على شكل دائرة يقع في مركز الدائرة.
      - ٣) مركز ثقل قشرة كروية منتظمة الكثافة يقع في مركز الكرة. ﴿ ﴿ ا
        - ٤) مركز ثقل كرة مصمته منتظمة الكثافة يقع في مركز الكرة.
  - ٥) مركز ثقل مجسم منتظم الكثافة على هيئة متوازى مستطيلات يقع في مركزه الهندسي.

- ٦) مركز ثقل قشرة اسطوانية دائرية قائمة منتظمة الكثافة يقع عند نقطة منتصف محورها.
- ٧) مركز ثقل اسطوانية دائرية قائمة مصمته منتظمة الكثافة يقع عند نقطة منتصف محورها.
- ٨) مركز ثقل منشور قائم منتظم يقع عند نقطة منتصف المحور الموازى لأحرف الجانبية والمار بمركزى ثقل قاعدتيه باعتبار هما صفيحتين رقيقتين منتظمتى الكثافة.

# 🕮 مثال:

صفيحة رقيقة منتظمة السمك والكثافة على شكل قرص دائرى مركزه نقطة الأصل وطول نصف قطره ٢ وحدات طول ، قطع منه قرصان دائريان مركز احدهما (١-١ - ٣) وطول نصف قطره وحدة طول ومركز الآخر (٢ - ١) وطول نصف قطره ٣ وحدات طول.أوجد مركز ثقل الجزء الباقى من القرص الأصلى.

# <u>ک الحسل:</u>

 $\pi$  ۳٦ =  $^{\mathsf{Y}}(\mathsf{I})\pi$  مساحة القرص الأصلى  $\pi$ 

، مساحة القرص الأول $\pi=\pi$ ، مساحة القرص الثانى $\pi=\pi$  وبفرض كتلة القرص الأصلى $\pi=\pi$ ك

$$\frac{\xi-}{17} = \frac{2\lambda-}{277} = \frac{1\times29-(1-)\times2-.\times277}{29-2-277} =$$

# 🕮 مثال:

# ك الحل:

ناخذ جب ع حج محورين متعامدين باعتبار ج نقطة الأصل

$$^{\prime}$$
: مساحة المستطيل  $= A \times F = A$  سم

ومساحة المربع 
$$3 \times 3 = 7$$
 سم

$$\frac{1-}{V} = c \frac{17-}{24} = c \frac{17-}{24}$$
 المربع القطوع كي  $\frac{1}{2}$ 

بتكوين جدول الإحداثيات

99					
المربع	المستطيل	الشكل			
01-	ථ	الكتلة			
٦	٤	w			
۲	40	3 Ave			

$$7,0 = \frac{7}{7} = \frac{2\frac{7}{7}}{2\frac{7}{7}} = \frac{7 \times 2\frac{7}{7} - 7 \times 2}{2\frac{7}{7} - 2} = \frac{70}{72 - 2$$

.. مركز ثقل الجزء الباقي هو (٣,٥،٣)

وبفرض ى زاوية ميل جب على الرأسى

$$^\circ$$
خطای  $= \frac{\omega_{\gamma}}{\omega_{\gamma}}$  خطای  $= \frac{(\sqrt{\gamma})^{1-1}}{\pi} = \frac{(\sqrt{\gamma})^{1-$ 

# المشال:

صفيحة رقيقة على شكل مثلث متساوى الساقين  $\P$ ب فيه  $\P$ ب  $= \P$  ،  $\overline{\P}$  هو ارتفاع المثلث وطوله ٤٥ سم. رسم مستقيم يوازى القاعدة  $\overline{\Psi}$  ويمر يمركز ثقل الصفيحة فقطع  $\overline{\P}$  ،  $\overline{\P}$  فى النقطتين ه ، و على الترتيب . اثبت أن مركز ثقل الشكل الرباعى ه  $\Psi$  ويقع على  $\overline{\P}$  وبعد ٧ سم عن نقطة  $\Xi$  .

## ک الحال:

- · المثلث متساوى الساقين ، هو // بج
- .: هب = وج .: هب جو شبه منحرف متساوى الساقين

97

- ن.  $\overline{SP}$  محور تماثل شبه النحرف ه  $\overline{SP}$
- .. مركز ثقل الشكل الرباعي هبجو يقع على 38
  - ". الصفيحة منتظمة الكثافة
  - ... النسبة بين الكتل = النسبة بين الساحات

مركز ثقل الصفيحة هو ٢ نقطة تقاطع المتوسطات

$$\frac{7}{9} = \frac{9}{9} = \frac{7}{9} : \frac{7}{8} : \frac{7}{8} = \frac{7}{9}$$

∴ ۵۵۹ه و ، ۹بج متشابهان

$$\frac{\xi}{q} = {}^{\Upsilon}(\frac{\Upsilon}{\Psi}) = \frac{(\Delta {}^{\uparrow} \alpha {}^{\downarrow})}{(\Delta {}^{\uparrow} \psi_{\pi})}$$
 ::

بفرض أن كتلة  $\Lambda$ اب = 9ك  $\therefore$  كتلة  $\Lambda$ اه  $\ell$  كك

ناخذ عَبَ ، محورين متعامدين باعتبار ح نقطة الأصل

$$(\Upsilon \circ \varsigma \bullet) = \varsigma \varsigma \cdot (\Upsilon \circ \varsigma \bullet) = \varsigma :$$

وبتكوين جدول الإحداثيات

1	Y	النقطة
હ દ –	طاع 6	الوزن
• 1	)	<del>س</del>
9	10	ص

$$V = \frac{70}{0} = \frac{21 \cdot \cdot - 2170}{20} = \frac{70 \times 25 - 10 \times 29}{25 - 29} = \frac{100 \cdot 2 - 202}{12 - 2} = 0.$$

- .. مركز ثقل الشكل الرباعي هو كم الله (٠٠٠)
- .. مركز ثقل الشكل الرباعي يبعد ٧ سم عن نقطة 5

# 🕮 مثال:

صفيحة رقيقة منتظمة محدودة بالمربع البحك الذي طول ضلعه ٤٠ سم، ثقبت ثقبا دائريا مساحته ١٠٠ سم م ومركزه عند نقطة على القطر بحك وتقسمه من الداخل بنسبة ١ : ٤ من ناحية ب ثم علقت تعليقا حرا من الراس ألم . عين زاوية قياس الضلع المسلم على الرأسي في وضع الإتزان.

# ک الحل:

○: \ = s · : \ : \ : \ = s · : \ : \ : \ : \

داع ...

#### إستاتيكا ثانوية عامة

لابداع في الرياضيات

∴ من تشابه △△بعه، ب۶ نجد أن:

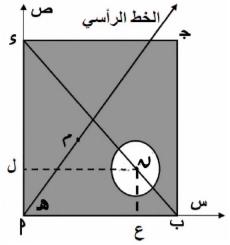
$$\frac{1}{0} = \frac{NE}{\xi} = \frac{E + \frac{1}{2}}{\xi} : \frac{NE}{\xi} = \frac{NE}{\xi} = \frac{E + \frac{1}{2}}{\xi}$$

$$\Upsilon\Upsilon = \Lambda - \xi \cdot = \Upsilon \varepsilon$$
 .  $\Lambda = \frac{\xi \cdot}{\circ} = \lambda \varepsilon = \varepsilon \varphi$  . .

مرکز ثقل الثقب الدائری 
$$u = (\Upsilon \Upsilon) = \Lambda$$

- . \* الصفيحة منتظمة الكثافة
- .. النسبة بين الكتل = النسبة بين الساحات

$$^{\prime}$$
، مساحة المربع =  $^{\prime}$   $^{\prime}$   $^{\prime}$  مساحة المربع =  $^{\prime}$ 



ومساحة الثقب = • • • ١ سم مساحة الدبع: مساحة الثقب = ١: ١٦

ناخذ البياء على محورين متعامدين باعتبار النقطة الأصل

وبتكوين جدول الإحداثيات

الدائرة	المربع	الشِكِل
⊴− ,	7	الكتلة
44	Ÿ	س س
٨ /	114.	O.

$$19, Y = \frac{Y \wedge \lambda}{10} = \frac{2 Y Y - 2 Y Y \cdot}{210} = \frac{Y Y \times 2 - Y \cdot \times 217}{2 - 217} = \dots$$

۲ , 
$$\lambda = \frac{\pi_1 \tau}{10} = \frac{2\lambda - 2\pi \tau}{210} = \frac{\lambda \times 2 - \tau \cdot \times 217}{2 - 217} = 0$$

وبفرض ه زاوية ميل الآب على الرأسي

$$^{\circ}$$
 خاھ =  $\frac{1}{m}$  نظھ =  $\frac{1}{m}$  نظھ =  $\frac{1}{m}$  نظھ =  $\frac{1}{m}$  نظھ =  $\frac{1}{m}$ 

# <u>ا</u> مثال:

البحك صفيحة رقيقة منتظمة على شكل مربع طول ضلعه ٤٨ سم وكتلتها ٤٠ جم ، النقطتان ك ، كم منتصفا الله ح ك كتلة تساوى كتلة المثلث منتصفا الله على الترتيب.قطع المثلث المثلث عند كل من ج ، ك كتلة تساوى كتلة المثلث المقطوع وثبت عند ب كتلة تساوى ضعف كتلة المثلث المقطوع فإذا علقت المجموعة تعليقا حرا من النقطة ج ، أوجد ظل زاوية ميل بح على الرأسي في وضع الإتزان.

# کے الحسل:

- ". الصفيحة منتظمة الكثافة
- .. النسبة بين الكتل = النسبة بين المساحات
- ، .. مساحة الربع = ٨ ٤ × ٨ ٤ = ٤ ٢٣ سم الم
- $^{ ext{`}}$ ومساحة الثلث $rac{1}{2}+ ext{`}$   $ext{`}$   $ext{`}$   $ext{`}$   $ext{`}$  ومساحة الثلث
  - : كتلة المربع ك = ١٠ ٤ جم

$$-$$
 جم  $-$  =  $+$  حتلة الثلث المقطوع  $+$   $+$  حرم  $+$  حتلة الثلث المقطوع  $+$  حرم  $+$  حرم

ناخذ جَبَى حَحَ محورين متعامدين باعتبار ج نقطة الأصل

$$(\xi \wedge \zeta \wedge \xi) = \zeta$$
,  $(\xi \wedge \zeta \wedge \lambda) = \xi$ .

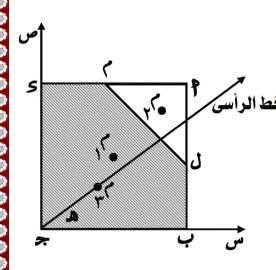
بتكوين جدول الإحداثيات

ب	5	>	3	Y	النقطة
١.	0	0	0-	*	الكتلة
٤٨	*	)	٤.	TO TO	5
	٤٨		4	7 2	ص

$$\frac{7 \, \xi \, \Lambda}{1 \, 1} = \frac{\xi \, \Lambda \times 1 \, \cdot + \cdot \times \circ + \cdot \times \circ + \xi \, \cdot \times \circ - 7 \, \xi \times \xi \, \cdot}{1 \, \cdot + \circ + \circ + \circ - \xi \, \cdot} =$$

$$\frac{\mathbf{Y} \cdot \cdot}{\mathbf{1} \cdot \mathbf{1}} = \frac{\mathbf{1} \cdot \mathbf{X} \cdot \mathbf{1} \cdot \mathbf{1} \cdot \mathbf{X} \cdot \mathbf{1} \cdot \mathbf{1} \cdot \mathbf{X} \cdot \mathbf{1} \cdot \mathbf{1} \cdot \mathbf{X} \cdot \mathbf{1}}{\mathbf{1} \cdot \mathbf{1} \cdot \mathbf{1} \cdot \mathbf{1} \cdot \mathbf{1} \cdot \mathbf{1}} = \mathbf{1} \cdot \mathbf{1} \cdot$$

وبفرض ه زاوية ميل جب على الرأسى



داع...

# 🕮 مثال:

صفیحة رقیقة منتظمة الکثافة علی شکل مستطیل  $\P$ بج۶ فیه  $\P$ ب = ۲ سم، بج = ۱ سم فرضت نقطة ه  $\Xi$  بحیث به  $\Xi$  بحیث به  $\Xi$  بحیث به فصل المثلث به و ووضعت الصفیحة فی مستوی رأسی بحیث إنطبق حرفها  $\Xi$  علی نضد أفقی أملس فکانت الصفیحة علی وشك الدوران حول (ه). أوجد طول  $\Xi$  .

# ك الحل:

- الصفيحة منتظمة الكثافة وبفرض v = b
  - .. النسبة بين الكتل = النسبة بين الساحات
- ، \* : مساحة المستطيل = ٢ × ٢ ١ = ٠ ٠ ٤ سم .

$$^{\prime}$$
ومساحة المثلث  $= \frac{1}{7} \times 1 \times 0 = 0$  سم

بفرض كتلة الستطيل = ٠٠ كاك

ے کتلة المثلث الفطوع کے 
$$-$$
 ول کے  $\times$   $\cdot$  کتلة المثلث الفطوع کے  $-$ 

نإخذ هس، هس محورين متعامدين باعتبار ه نقطة الأصل

$$\therefore \mathbf{a} = (\cdot, \cdot), \quad \mathbf{v} = (\cdot, \cdot), \quad \mathbf{e} = (\cdot, \cdot)$$

$$(17,0,7) = 7 \cdot (\frac{3}{7},\frac{7}{7}) = (\frac{3+3+7}{7},\frac{1+1}{7},\frac{1+1}{7}) = 7 :$$

بتكوين جدول الإحداثيات

. ,		
46	۲,	النقطة
<u> </u>	८१	الكتلة
7. 7.	۲	w
7	17,0	ص

$$\frac{\sqrt{\frac{1}{1}} \cdot - \wedge \cdot \cdot}{\sqrt{1} \cdot \sqrt{\frac{1}{1}} \cdot \sqrt{\frac{1}{1}}} = \frac{\sqrt{\frac{1}{1}} \cdot \times 2 \cdot 10 - 1 \times 2 \cdot \cdot \cdot}{2 \cdot 10 - 2 \cdot \cdot \cdot \cdot} = \sqrt{\frac{1}{1}} \cdot \frac{1}{1} \cdot \frac{$$

- ·· الصفيحة على وشك الدوران حول ه . ·. هـ تعتبر نقطة إرتكاز (مثل نقطة التعليق
  - .. الخط الرأسي المار بنقطة ه يمر بمركز الثقل ... س = •

$$7 = \frac{7 \times 1}{7 \cdot 1} = 3 \cdot \dots \quad \lambda \cdot \cdot = 3 \cdot \frac{1}{7 \cdot 1} = 3 \cdot \dots \quad \lambda \cdot \cdot = 3 \cdot \frac{1}{7 \cdot 1} \cdot \dots$$